A 55-A OLIMPIADĂ NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Deva, 5 aprilie 2004

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Se consideră un număr întreg $n \geq 3$ şi parabola $y^2 = 2px$, cu focarul F. Un poligon regulat $A_1A_2 \cdots A_n$ are centrul în F şi niciunul dintre vârfurile sale nu se află pe Ox. Semidreptele $(FA_1, (FA_2, \ldots, (FA_n$ taie parabola în punctele $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Demonstraţi că $FB_1 + FB_2 + \cdots + FB_n > np$.

Subiectul 2. Fie dat un număr natural n, $n \geq 2$.

a) Daţi un exemplu de matrici $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ cu proprietatea că

$$\operatorname{rang}(AB) - \operatorname{rang}(BA) = \left[\frac{n}{2}\right].$$

b) Arătaţi că pentru orice $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ avem

$$\operatorname{rang}(XY) - \operatorname{rang}(YX) \leq \left[\frac{n}{2}\right].$$

Subiectul 3. Fie $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ o funcţie cu proprietatea că pentru orice $x \in (a, b)$, există un interval nedegenerat $[a_x, b_x]$ cu $a < a_x \leq x \leq b_x < b$, astfel încât f este constantă pe $[a_x, b_x]$.

a) Demonstraţi că imaginea funcţiei f este mulţime finită sau numărabilă.

b) Determinaţi funcţiile continue care satisfac proprietatea din ipoteză.

Subiectul 4. a) Construiţi o funcţie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ cu proprietatea:

$$\text{orice } x \in \mathbf{Q} \text{ este punct de minim local strict pentru } f. \qquad (*)$$

b) Construiţi $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}_+$ cu proprietatea că orice punct este punct de minim local strict şi f este nemărginită pe orice mulţime de forma $I \cap \mathbf{Q}$, unde I este interval nedegenerat.

c) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ o funcţie nemărginită pe orice mulţime de forma $I \cap \mathbf{Q}$, cu I interval nedegenerat. Să se arate că f nu are proprietatea $(*)$.

Precizare: x se numeşte punct de minim local strict pentru $f : D \to \mathbf{R}$ dacă există o vecinătate V a lui x astfel încât $f(y) > f(x)$ pentru orice $y \in V \cap D \setminus \{x\}$.